

## Zur Problematik der Wertsynthese bei Nutzwertanalysen — Bemerkungen zu H. Witte —

VON DR. PETER CERWENKA, BASEL

### 1. Veranlassung

In Heft 1/1979 dieser Zeitschrift behandelt *H. Witte* in seinem Beitrag<sup>1)</sup> unter anderem eine auf Nutzwertanalysen anzuwendende additiv-multiplikativ verknüpfte Wertsyntheseregeln, die unter Beibehaltung seiner Terminologie und Symbolik, also mit

- $i$  . . . . . Index der Entscheidungsalternative,
- $j$  . . . . . Index der Entscheidungsdimension,
- $J$  . . . . . Anzahl der Entscheidungsdimensionen,
- $g_j$  . . . . . Gewichte,
- $n_{ij}$  . . . . . Teilnutzwerte,
- $N_i$  . . . . . Nutzwerte,

in seinem Beitrag (auf S. 46) mathematisch formalisiert folgendermaßen lautet:

$$N_i = \sum_{j=1}^J g_j \cdot n_{ij} + \prod_{j=1}^J n_{ij} \quad (1)$$

Dabei ist die übliche normierende Nebenbedingung

$$\sum_{j=1}^J g_j = 1 \quad (2)$$

einzuhalten.

Anhand eines sehr einfachen kleinen Zahlenbeispiels wird nachfolgend zunächst gezeigt, daß diese Syntheseregeln zu Widersprüchen führt.

#### *Anschrift des Verfassers:*

Dr. Peter Cerwenka  
Prognos AG  
Steinengraben 42  
CH-4051 Basel

1) *Witte, H.*, Das Problem der Auswahl einer adäquaten Wertsyntheseregeln bei Nutzwertanalysen im Verkehrswesen, in: *Zeitschrift für Verkehrswissenschaft*, 50. Jg. (1979), S. 44-51.

Fall A:

	$g_j$	$n_{ij}$	
		$i=1$	$i=2$
$j=1$	0,1	10	9
$j=2$	0,9	10	11

Dies ergibt:  $N_1 = 0,1 \cdot 10 + 0,9 \cdot 10 + 10 \cdot 10 = 110,00$   
 $N_2 = 0,1 \cdot 9 + 0,9 \cdot 11 + 9 \cdot 11 = 109,80$   
 Somit gilt:  $N_1 > N_2$

Fall B: (identisch mit Fall A, jedoch werden alle  $n_{ij}$  einheitlich mit einem Faktor 0,1 multipliziert, was lediglich einer proportionalen Maßstabsvariation entspricht und daher die Reihung nicht beeinflussen dürfte und überdies die Relationen  $N_1/N_2$  exakt erhalten müßte):

	$g_j$	$n_{ij}$	
		$i=1$	$i=2$
$j=1$	0,1	1,0	0,9
$j=2$	0,9	1,0	1,1

Dies ergibt:  $N_1 = 0,1 \cdot 1,0 + 0,9 \cdot 1,0 + 1,0 \cdot 1,0 = 2,00$   
 $N_2 = 0,1 \cdot 0,9 + 0,9 \cdot 1,1 + 0,9 \cdot 1,1 = 2,07$   
 Somit gilt:  $N_1 < N_2$

Die Ergebnisse der beiden Fälle sind offensichtlich widersprüchlich, und die Syntheseregeln (1) bedarf somit einer Klärung.

### 2. Widerspruchsbeseitigung

Mit Hilfe eines eher intuitiven Einfühlungsvermögens für Normierungsprozesse gelang es zunächst, den Widerspruch durch folgende Modifikation von (1) zu beseitigen:

$$N_i = \sum_{j=1}^J g_j \cdot n_{ij} + \prod_{j=1}^J n_{ij}^{1/J} \quad (3)$$

Werden die Zahlen des vorstehenden Beispiels verwendet, so ergeben sich mit  $J=2$  folgende Nutzwerte:

Fall A:  $N_1 = 20,0000$ ,  $N_2 = 20,7499$

Fall B:  $N_1 = 2,00000$ ,  $N_2 = 2,07499$

Damit sind nicht nur die Reihenfolgen, sondern auch die Nutzwertrelationen  $N_1/N_2$  exakt erhalten geblieben, was Zweck der Modifikation war.

Dennoch erschien auch diese Modifikation noch nicht befriedigend, da die Gewichte  $g_j$  im multiplikativen Anteil gänzlich fehlten. Bei näherer Betrachtung von (3) fiel dann auf, daß sich der additive Anteil unter Berücksichtigung der Nebenbedingung (2) als gewogenes arithmetisches Mittel aller Teilnutzwerte einer Entscheidungsalternative interpretieren läßt, der multiplikative Anteil hingegen als  $u$   $n$  gewogenes geometrisches Mittel. Es lag nun nahe, auch für den multiplikativen Anteil ein gewogenes (geometrisches) Mittel heranzuziehen, womit sich Formel (3) folgendermaßen modifiziert darstellen läßt:

$$N_i = \sum_{j=1}^J g_j \cdot n_{ij} + \prod_{j=1}^J \frac{g_j}{n_{ij}} \quad (4)$$

Mit den Zahlenwerten des vorangehenden Beispiels ergibt sich:

Fall A:  $N_1 = 20,0000$ ,  $N_2 = 21,5815$

Fall B:  $N_1 = 2,00000$ ,  $N_2 = 2,15815$

Erwartungsgemäß sind hierbei die erwünschten bzw. als plausibel zu fordernden Eigenschaften ebenfalls exakt eingehalten. Aus Normierungsgründen empfiehlt es sich übrigens, die rechte Seite von Gleichung (4) noch mit 0,5 zu multiplizieren, womit man den Nutzwert dann als ungewogenes arithmetisches Mittel aus gewogenem arithmetischem und gewogenem geometrischen Mittel der Teilnutzwerte interpretieren kann:

$$N_i = 0,5 \cdot \left( \sum_{j=1}^J g_j \cdot n_{ij} \right) + 0,5 \cdot \left( \prod_{j=1}^J \frac{g_j}{n_{ij}} \right) \quad (5)$$

Mit Hilfe einer gegenüber (5) verallgemeinerten Linearkombination in der Form

$$N_i = c \cdot \left( \sum_{j=1}^J g_j \cdot n_{ij} \right) + (1-c) \cdot \left( \prod_{j=1}^J \frac{g_j}{n_{ij}} \right) \quad (6)$$

kann man schließlich je nach Wahl des noch offenen Freiheitsgrades  $c$  innerhalb des Bereiches  $[0,1]$  entweder den additiven oder den multiplikativen Effekt der Wertsynthese dominieren lassen. Auch in dieser verallgemeinerten Form bleiben bei proportionaler Veränderung des Skalenmaßstabes für die  $n_{ij}$  die Relationen der  $N_i$  untereinander exakt erhalten, wie nachfolgend nachgewiesen wird. Der Nachweis ist erbracht, wenn ein konstanter Faktor  $k$ , der die Maßstabsvariation der  $n_{ij}$  repräsentieren möge, nach der Wertsynthese als konstanter Proportionalitätsfaktor in der Definitionsgleichung (6) für den Nutzwert auftritt:

$$N_i = c \cdot \left[ \sum_{j=1}^J g_j \cdot (k \cdot n_{ij}) \right] + (1-c) \cdot \left[ \prod_{j=1}^J (k \cdot n_{ij})^{g_j} \right] =$$

$$= c \cdot k \cdot \left( \sum_{j=1}^J g_j \cdot n_{ij} \right) + (1-c) \cdot k^{g_1 + g_2 + \dots + g_J} \cdot \left( \prod_{j=1}^J n_{ij}^{g_j} \right)$$

Wegen (2) gilt:

$$\frac{g_1 + g_2 + \dots + g_J}{k} = k^1 = k$$

Somit stellt sich  $N_i$  in der zu beweisenden Form wie folgt dar:

$$N_i = k \cdot \left[ c \cdot \left( \sum_{j=1}^J g_j \cdot n_{ij} \right) + (1-c) \cdot \left( \prod_{j=1}^J n_{ij}^{g_j} \right) \right] \quad (7)$$

Aufgrund des Nachweises entsprechend Gleichung (7) ist in allen auf (1) aufbauenden Formeln – auch im Beitrag von *Witte* – die analoge Korrektur (das heißt, die Potenzierung der Teilnutzwerte mit den normierten Gewichten) vorzunehmen. Im Beitrag von *Witte* sind dies dessen Formeln (10) und (11).

### 3. Gewichtung bei multiplikativer Synthese

Unter Berücksichtigung der verallgemeinerten und widerspruchsfreien Syntheseregeln (6) soll nun noch auf Fußnote <sup>6)</sup> (S. 46) des Beitrages von *Witte* eingegangen werden. Diese lautet: „Über die Wirkung einer Gewichtung bei multiplikativer Verknüpfung der Teilnutzwerte bestehen in der Literatur unterschiedliche Auffassungen. *Zangemeister* hält die Gewichtung schlicht für wirkungslos. . . . *Dreyer* hingegen sieht eine Gewichtung dann als sinnvoll an, wenn die Gewichte  $g_j$  als Exponenten der Teilnutzwerte  $n_{ij}$  auftreten. . . .“ Ganz offensichtlich wittert *Witte* zwischen der Aussage von *Zangemeister*<sup>2)</sup> einerseits und jener von *Dreyer*<sup>3)</sup> andererseits Widersprüche oder zumindest „unterschiedliche Auffassungen“. Tatsächlich jedoch sind bei einer rein multiplikativen Verknüpfung der Teilnutzwerte mit den Gewichten als Faktoren – und nur darauf bezieht sich (wenn auch nicht eigens erwähnt, so doch unverkennbar) die zitierte Aussage von *Zangemeister* – die Nutzwertrelationen einzelner Entscheidungsalternativen untereinander und damit natürlich auch die Alternativereihenungen vollkommen unabhängig von den Gewichts-faktoren, wie sich sofort zeigen läßt:

$$N_i = \prod_{j=1}^J g_j \cdot n_{ij} = \left( \prod_{j=1}^J g_j \right) \cdot \left( \prod_{j=1}^J n_{ij} \right)$$

2) *Zangemeister, C.*, Nutzwertanalyse in der Systemtechnik, 3. Auflage, München 1973, S. 280.

3) *Dreyer, A.*, Nutzwertanalyse als Entscheidungsmodell bei mehrfacher Zielsetzung, Diss. Hamburg 1975, S. 131 (zitiert nach: *Witte, H.*, Das Problem . . . , a.a.O., S. 46).

Der erste eingeklammerte Faktor ist von der Alternativenindizierung  $i$  unabhängig und kann daher als ein für alle Entscheidungsalternativen identischer Proportionalitätsfaktor weggelassen werden. Damit ist eine Gewichtung – wie übrigens auch *Witte* selbst feststellt – in dieser Form überflüssig. Aber auch die Aussage von *Dreyer* ist plausibel und überdies durchaus verträglich mit jener von *Zangemeister*. *Dreyer* verwendet nämlich laut Zitat von *Witte* die Gewichte nicht als Faktoren, sondern als Exponenten, und dies ist, wie gerade der vorliegende Beitrag zeigt, nicht nur sinnvoll, sondern aus Gründen logischer Konsistenz sogar zu fordern, insbesondere dann, wenn man eine kombinierte additiv-multiplikative Wertsynthese durchzuführen beabsichtigt. Es handelt sich also keineswegs um unterschiedliche Auffassungen in der Literatur, jedenfalls nicht in der von *Witte* zitierten. Weder handelt es sich darin um unterschiedliche Auffassungen noch um Auffassungen überhaupt, sondern um zwei logisch deduzierbare und miteinander verträgliche Aussagen, die beide über das Stadium von Auffassungen erhaben sind.

#### 4. Was sind „richtige“ bzw. „falsche“ Ergebnisse?

Abschließend sei noch ein kurzer Grundsatzexkurs über Ausdrücke wie „falsche Ergebnisse“, „bessere Ergebnisse“, „falscher Gesamtnutzwert“ gestattet, die wiederholt in dem Beitrag von *Witte* (wie auch in anderen Beiträgen) im Zusammenhang mit Präferenzen zugunsten der einen oder einer anderen Wertsynthesregel auftauchen. Die Anwendung des Begriffes „richtig“ (bzw. „falsch“) im wissenschaftstheoretischen Sinne setzt die Definition einer übergeordneten, verallgemeinerten Regel oder Gesetzmäßigkeit voraus, an welcher sich die Richtigkeit einer daraus deduzierten Aussage überhaupt erst orientieren kann. Die verallgemeinerte Gesetzmäßigkeit darf nun aber nicht mit der deduzierten Aussage definitiv identisch sein, da es sonst bekanntlich zu (inhaltslosen und daher überflüssigen) Zirkulärschlüssen kommt. Auf den vorliegenden Fall bezogen heißt das: Wenn man die additive Synthese als verallgemeinerte Regel definiert, liefert zwangsläufig das arithmetische Mittel das „richtige“ (das heißt, dieser Regel entsprechende) Ergebnis, definiert man hingegen die multiplikative Synthese als verallgemeinerte Regel, so liefert konsequenterweise das geometrische Mittel das „richtige“ Ergebnis. Beide Folgerungen sind jedoch fast triviale Zirkulärschlüsse, da die jeweils deduzierten Aussagen nahezu definitiven Charakter haben und kaum einen weiterführenden Sinngehalt liefern. Eine übergeordnete Regel sozusagen als Kriterium für die Richtigkeit einer bestimmten Wertsynthese und damit als zwingendes Argument für eben diese fehlt hier jedoch, und sie wird auch in dem Beitrag von *Witte* nicht mitgeteilt. Nach Auffassung des Verfassers kann es ein solches Patentrezept auch gar nicht geben, da Wertsynthesen sehr stark normativen Charakter haben (überspitzt ausgedrückt also Geschmackssache sind, die allerdings gewisse plausible Bedingungen erfüllen müssen) und sich somit einer Allgemeingültigkeit etwa im naturgesetzlichen Sinne weitgehend entziehen. Daher erscheint eine (unkommentierte) Anwendung der Begriffe „richtig“ oder „falsch“ auf Wertsynthesen unangebracht. Legitimer ist wohl die Bezeichnung „plausibel“ etwa in dem Sinne, daß bestimmte einleuchtende Anforderungen (wie zum Beispiel Invarianz des Reihungsergebnisses beziehungsweise – noch schärfer – der Nutzwertrelationen gegenüber einer proportionalen Maßstabsvariation der Teilnutzwerte) nicht verletzt werden.

#### Summary

An additive-multiplicatively linked rule of value synthesis in the contribution made by WITTE (issue 1/1979 of this journal), possibly conducive to contradictions, is criticized and subsequently brought into a form free from contradictions. Differently interpreted conceptions of weightings associated with the multiplicative value synthesis are analyzed thereafter. These conceptions are compatible in information. Finally, the properties "right" or "wrong" ascribed to the rules of value synthesis and their results are critically discussed.

#### Résumé

Il est fait la critique d'une règle de synthèse de valeurs tirée de la contribution de WITTE (numéro 1/1979 de la présente revue) comprenant des associations additives et multiplicatives susceptibles de conduire à des contradictions. Une fois les sources de contradiction écartées, cette règle est reformulée. Des conceptions diverses résultant d'interprétations différentes quant aux pondérations dans la synthèse multiplicative de valeurs sont ensuite analysées. Ce faisant, ces conceptions différentes s'avèrent compatibles. Pour terminer, les appréciations "juste" et "faux", appliquées à des règles de synthèse de valeurs et à leurs résultats, sont soumises à une discussion critique.